

ラグランジュ点近傍における小ハロー軌道の生成

2010SE072 伊藤凌平 2010SE105 小出和直 2010SE122 宮沢龍太郎

指導教員：市川朗

1 はじめに

人工衛星は通信や測位などに利用されており、我々の生活に不可欠である。近年では惑星の観測技術においての大きな進展をみせている。人工衛星は与えられたミッションによってさまざまな軌道を採用しており、用途に応じて適切な軌道を設計することが観測精度や燃費の向上につながる。ここで月面観測について考える。月の自転周期は地球の周囲を回る公転周期と同期しているため、月は地球に対して常に同じ面を向けている。したがって、月の裏側は地球から観測することが出来ない。この問題に対し、本研究では月の裏側を宇宙機によって効率的に観測することを可能とする小ハロー軌道をラグランジュ点近傍に生成する。ラグランジュ点とは、質量差のある二つの天体が共通重心の周りをそれぞれ円軌道を描いて回っているとき、この二天体に比べて質量が無視できるほど小さな宇宙機のある速度を与えてこの軌道面内に置くと、最初の二天体との相対位置を変えずに回り続けることができる位置のことであり、五つの点が存在する。ラグランジュ点では二天体を作る重力場が遠心力と釣り合っているため宇宙機は二天体に対して相対的に不動のままであることができる。本研究においては、地球-月系のラグランジュ点のうち、地球から見て月の裏側に位置する L_2 点近傍で小ハロー軌道を生成する。ハロー軌道とは、ラグランジュ点の周りを周回する周期軌道である。ここでは、二天体の重力と宇宙機の向心加速度が複雑に関係した三体問題において実現されるものであり、宇宙機の運動方程式を L_2 点近傍で線形化することにより小ハロー軌道を生成する。また、宇宙機を L_2 点から小ハロー軌道へ移行し、維持するために、最適レギュレータを用いて状態フィードバックを設計する。この状態フィードバック制御の性能は制御に必要な総速度変化（ノルム）により評価する。

2 軌道方程式の導出

2.1 宇宙機の運動方程式

慣性座標系の原点を $O-\{I, J, K\}$ とし、地球と月の制限三体問題を考える。

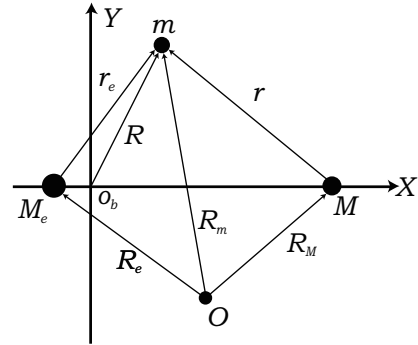


図1 三体問題

慣性座標系における原点 O から地球、月、宇宙機の位置ベクトルをそれぞれ R_e, R_M, R_m とする。ここで、 M_e, M, m はそれぞれ地球、月、宇宙機の質量であり、 G は万有引力定数で月と地球の重心を原点とする回転座標系の原点を $o_b - \{i_b, j_b, k_b\}$ とする。また、 r_e と r はそれぞれ地球、月から宇宙機への位置ベクトルであり、 $D = R_M - R_e$ 、 $D = |D|$ 、 $r_e = |r_e|$ 、 $r = |r|$ である。このとき地球と月の運動方程式は、

$$\begin{aligned}\ddot{R}_e &= \frac{GM}{D^3} D + \frac{Gm}{r_e^3} r_e, \\ \ddot{R}_M &= -\frac{GM_e}{D^3} D + \frac{Gm}{r^3} r,\end{aligned}$$

となり、相対ベクトル D は、

$$\ddot{D} = -\frac{G(M_e + M)}{D^3} D + Gm\left(\frac{r}{r^3} - \frac{r_e}{r_e^3}\right).$$

を満たす。制限三体問題において、 $m \ll M_e, M$ であり、地球と月の二体問題の方程式は、

$$\ddot{D} = -\frac{\mu}{D^3} D,$$

となる。ここで、 $\mu = G(M_e + M)$ である。 o_b から宇宙機への位置ベクトルを R とする。このとき、宇宙機の運動方程式

$$\ddot{R} = -\frac{GM_e}{r_e^3} r_e - \frac{GM}{r^3} r + u, \quad (1)$$

が得られる。ここで、 u は制御加速度である。地球と月の共通重心のまわりの円運動であると仮定し、パラメータの

値を

$$\begin{aligned}
D_0 &= 384,748 \text{ [km]} \\
M_e &= 81.3045M \\
\mu_1 &= GM_e = 398,601 \text{ [km}^3/\text{s}^2] \\
\mu_2 &= GM = 4887 \text{ [km}^3/\text{s}^2] \\
n &= (\mu/D_0^3)^{1/2} = 2.661699 \times 10^{-6} \text{ [rad/s]} \\
\rho &= M/(M_e + M) = 0.01215 \\
D_1 &= \rho D_0 = 4674 \text{ [km]} \\
D_2 &= (1 - \rho)D_0 = 380,073 \text{ [km]}
\end{aligned}$$

とする。\$D_0\$ は、地球の中心から月の中心までの距離であり、\$n\$ は円運動の角速度である。ここで、\$i_b\$ は地球から見た月の方向であり、角速度ベクトルは \$nk_b\$ である。

$$\begin{aligned}
\mathbf{R} &= X\mathbf{i}_b + Y\mathbf{j}_b + Z\mathbf{k}_b, \\
\mathbf{r}_e &= D_1\mathbf{i}_b + \mathbf{R}, \\
\mathbf{r} &= \mathbf{R} - D_2\mathbf{i}_b,
\end{aligned} \tag{2}$$

とすると、(1) 式より、

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{R}} &= \left\{ -\frac{GM_e}{r_e^3}(X + D_1) - \frac{GM}{r^3}(X - D_2) \right\} \mathbf{i}_b \\
&+ \left\{ -\frac{GM_e}{r_e^3}Y - \frac{GM}{r^3}Y \right\} \mathbf{j}_b \\
&+ \left\{ -\frac{GM_e}{r_e^3}Z - \frac{GM}{r^3}Z \right\} \mathbf{k}_b + \mathbf{u}
\end{aligned} \tag{3}$$

が得られる。ここで、\$D_1\$ と \$D_2\$ はそれぞれ重心と地球、月の間の距離である。ここで回転座標系の \$i_b, j_b, k_b\$ の一階微分は、\$nj_b, -ni_b, 0\$ となり、(2) 式の \$\mathbf{R}\$ の二階微分は、

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{R}} &= (\ddot{X} - 2n\dot{Y} - n^2X)\mathbf{i}_b \\
&+ (\dot{Y} + 2n\dot{X} - n^2Y)\mathbf{j}_b + \ddot{Z}\mathbf{k}_b,
\end{aligned} \tag{4}$$

となる。(3) 式と (4) 式の係数比較をすると、

$$\begin{aligned}
\ddot{X} - 2n\dot{Y} - n^2X &= -\frac{GM_e}{r_e^3}(X + D_1) \\
&- \frac{GM}{r^3}(X - D_2) + u_x, \\
\dot{Y} + 2n\dot{X} - n^2Y &= -\frac{GM_e}{r_e^3}Y - \frac{GM}{r^3}Y + u_y, \\
\ddot{Z} &= -\frac{GM_e}{r_e^3}Z - \frac{GM}{r^3}Z + u_z,
\end{aligned} \tag{5}$$

が得られる。ここでは、\$r_e, r\$ を、

$$\begin{aligned}
r_e &= [(X + D_1)^2 + Y^2 + Z^2]^{1/2}, \\
r &= [(X - D_2)^2 + Y^2 + Z^2]^{1/2},
\end{aligned}$$

とおく。

2.2 方程式の無次元化

計算を簡単にする為に、\$\tau = t/(1/n)\$, \$\bar{X} = X/D_0\$, \$\bar{Y} = Y/D_0\$, \$\bar{Z} = Z/D_0\$, \$\bar{u}_x = u_x/n^2D_0\$, \$\bar{u}_y = u_y/n^2D_0\$,

\$\bar{u}_z = u_z/n^2D_0\$, \$\bar{r}_e = r_e/D_0\$, \$\bar{r} = r/D_0\$ とし、(5) 式を無次元化する。' は \$\tau\$ に関する微分を意味する。(5) 式より、

$$\begin{aligned}
\bar{X}'' - 2\bar{Y}' - \bar{X} &= -\frac{1-\rho}{\bar{r}_e^3}(\bar{X} + \rho) - \frac{\rho}{\bar{r}^3}(\bar{X} - 1 + \rho) + \bar{u}_x, \\
\bar{Y}'' + 2\bar{X}' - \bar{Y} &= -\frac{1-\rho}{\bar{r}_e^3}\bar{Y} - \frac{\rho}{\bar{r}^3}\bar{Y} + \bar{u}_y, \\
\bar{Z}'' &= -\frac{1-\rho}{\bar{r}_e^3}\bar{Z} - \frac{\rho}{\bar{r}^3}\bar{Z} + \bar{u}_z,
\end{aligned} \tag{6}$$

が得られる。ここで、\$\bar{r}_e, \bar{r}\$ を

$$\begin{aligned}
\bar{r}_e &= [(\bar{X} + \rho)^2 + \bar{Y}^2 + \bar{Z}^2]^{1/2}, \\
\bar{r} &= [(\bar{X} - 1 + \rho)^2 + \bar{Y}^2 + \bar{Z}^2]^{1/2},
\end{aligned}$$

とおく。

2.3 方程式の線形化

以下では、小ハロ-軌道の方程式を導出する。

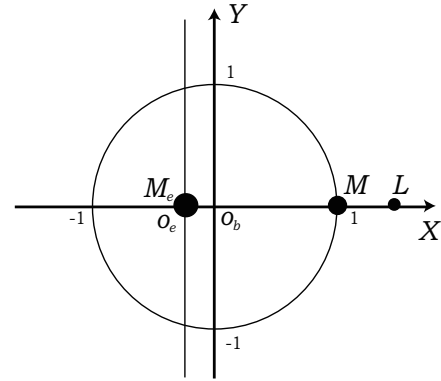


図2 ラグランジュ点

(6) 式はラグランジュ点と呼ばれる静止点 \$L_i\$ を持ち、

$$\begin{aligned}
\bar{X} &= \frac{1-\rho}{\bar{r}_e^3}(\bar{X} + \rho) + \frac{\rho}{\bar{r}^3}(\bar{X} - 1 + \rho), \\
\bar{Y} &= \frac{1-\rho}{\bar{r}_e^3}\bar{Y} + \frac{\rho}{\bar{r}^3}\bar{Y}, \\
\bar{Z} &= 0,
\end{aligned} \tag{7}$$

で与えられる。月の裏側のラグランジュ点を \$L_2 = (l_2(\rho), 0, 0)\$ とおく。(7) 式は、\$\rho\$ の値を変えることによって、一般の三体システムの定常点も求められ、地球-月系では \$\rho=0.01215\$ であり、\$(l_1, l_2, l_3)=(0.83692, 1.15568, -1.00506)\$ となる。(6) 式を \$L_2\$ 点周りで1次の項までテイラー展開し、線形化した方程式を以下に示す。

$$\begin{aligned}
\bar{X}'' - 2\bar{Y}' - (2\sigma + 1)\bar{X} &= \bar{u}_x, \\
\bar{Y}'' + 2\bar{X}' + (\sigma - 1)\bar{Y} &= \bar{u}_y, \\
\bar{Z}'' + \sigma\bar{Z} &= \bar{u}_z,
\end{aligned} \tag{8}$$

これを用いて、小ハロ-軌道を生成する。ここで、\$\sigma = \rho/(l_2(\rho) - 1 + \rho)^3 + (1 - \rho)/(l_2(\rho) + \rho)^3 = 3.19043\$ である。

3 周波数制御

面内運動, 面外運動はそれぞれ周期解をもつが, (8) 式の 3 次元運動の周期解は存在しない.

本研究では常に地球の裏側を安定的に観測するために, 解の周波数を面内運動の ω_{xy} , 面外運動の ω_z , または任意の周波数 ω_{xyz} , $\omega = 1, 1/2, 2, 3$ に合わせ, 三次元周期解を生成する制御を行う. ここで $\omega_{xyz} = \frac{\omega_{xy} + \omega_z}{2} = 1.8244$ とする. (8) 式の状態方程式は,

$$\dot{x} = Ax + Bu, x(0) = x_0,$$

である. ここで,

$$\begin{aligned} x &= [\bar{X} \quad \bar{Y} \quad \bar{X}' \quad \bar{Y}' \quad \bar{Z} \quad \bar{Z}']^T, \\ u &= [\bar{u}_x \quad \bar{u}_y \quad \bar{u}_z]^T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2\sigma + 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \sigma & -2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma & 0 \end{array} \right], \\ &\equiv \text{diag}[A_{in}, A_{out}], \\ B &= \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array} \right], \\ &\equiv \text{diag}[B_{in}, B_{out}], \end{aligned}$$

とする. 面内運動, 面外運動のシステム行列の特性方程式は,

$$\begin{aligned} |\lambda I - A_{in}| &= \lambda^4 - (\sigma - 2)\lambda^2 - (2\sigma + 1)(\sigma - 1) = 0, \\ |\lambda I - A_{out}| &= \lambda^2 + \sigma = 0, \end{aligned}$$

となる. 面内運動の周波数は解の虚数根である $\omega_{xy} = 1.8627$ であり, 面外運動は周波数 $\sqrt{\sigma} = \omega_z = 1.7862$ の正弦波である. 周波数制御をするにあたり, 本研究では 7 つの周波数に合わせる制御を行った. ここでは, 任意の周波数 ω での周波数制御を例にあげる. 初めに, (8) 式の解を,

$$\begin{aligned} \bar{X}(\tau) &= -(\bar{a}/k) \sin \omega_{xy} \tau, \\ \bar{Y}(\tau) &= -\bar{a} \cos \omega_{xy} \tau, \\ \bar{Z}(\tau) &= \bar{a} \sin \omega_z \tau, \end{aligned} \quad (9)$$

の形で求めると,

$$k = \frac{\omega^2 + 2\sigma + 1}{2\omega}$$

となる. このとき特殊解は (8) 式の自由運動を満たし, 図 3 のようなりサージュ軌道を形成する.

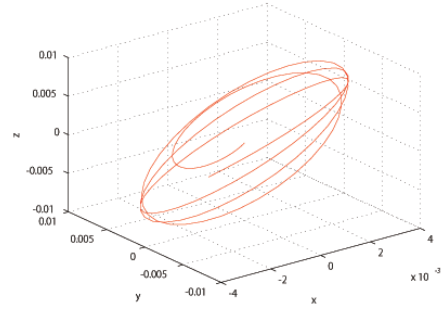


図 3 リサージュ軌道

$\bar{a} = 0.0091$ のとき, 最大の振幅は 3500[km] となり, この軌道上の宇宙機は地球から観測することができる. なお, (\bar{Y}, \bar{Z}) 運動は, 地球からの概観である. 周期解を求めるため, まず面外運動の周波数を面内運動の周波数に合わせる制御をおこなう. フィードバック制御により, 特殊解が (8) 式の第 2 式を満たすためには,

$$\bar{u}_y = f \bar{Y},$$

となる. ここで,

$$f = \frac{2\omega}{k} + \sigma - 1 + \omega^2,$$

である. 面外運動の周波数を面内運動の周波数に合わせるには,

$$\bar{u}_z = -(\omega^2 - \omega_z^2) \bar{Z},$$

とおく. 以上より,

$$\begin{aligned} \bar{X}(\tau) &= -(\bar{a}/k) \sin \omega \tau, \\ \bar{Y}(\tau) &= -\bar{a} \cos \omega \tau, \\ \bar{Z}(\tau) &= \bar{a} \sin \omega \tau, \end{aligned}$$

となる.

4 シミュレーション

4.1 最適レギュレータ

(8) 式の状態方程式より,

$$\dot{x} = Ax + Bu, x(0) = x_0,$$

である. そのときの評価関数は以下に表わす.

$$J(u; x_0) = \int_0^\infty [x^T Q x + u^T(t) R u(t)] dt,$$

Q は状態にかかる重みであり, 6×6 の半正定対称行列である. また, R は入力にかかる重みであり, 3×3 の正定対称行列である. 本研究では Q を固定して考えているため, 評価関数を最小にする $u(t)$ を求める. そのために以下の代数リッカチ方程式より適切な X を求める.

$$A^T X + X A + Q - X B R^{-1} B^T X = 0,$$

フィードバックゲイン K は上の式より,

$$K = R^{-1}B^T X,$$

となる [1].

4.2 誤差方程式

制御軌道を $\dot{x} = Ax + Bu$, 目標軌道を $\dot{x}_f = Ax_f + Bu_f$ とするとき, 制御軌道と目標軌道の誤差は,

$$e = x - x_f$$

となり,

$$\begin{aligned} \dot{e} &= Ax + Bu - Ax_f - Bu_f \\ &= Ae + B(u - u_f), \end{aligned}$$

となる. ここで, フィードバックを $u - u_f = -Ke$ とすると,

$$\dot{e} = (A - BK)e,$$

となる.

4.3 維持制御

以下のシミュレーションでの目標軌道 (維持軌道) と制御軌道の初期値はそれぞれ,

$$\begin{aligned} x_0 &= [0 \quad \bar{a} \quad \bar{a}\omega/k \quad 0 \quad 0 \quad \bar{a}\omega]^T \\ x_{f0} &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \end{aligned}$$

であり, $Q = 10 \times I_6$ とする. 図 4 は, 周波数制御をおこなった目標軌道であり 4 周期目までは収束しているが, 4 周期目以降で発散していきことが分かった.

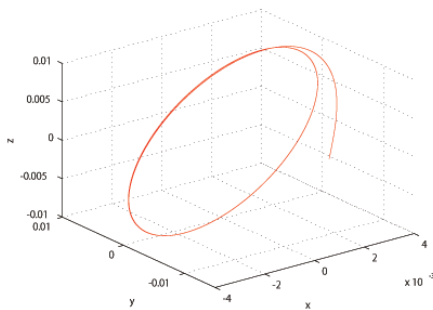


図 4 小八口ー軌道 (4 周期以降発散)

目標軌道を維持させるため, 4 周期までに目標軌道の値を初期値にもどす制御を行う必要がある. このときの軌道のシミュレーション結果を図 5 に示す.

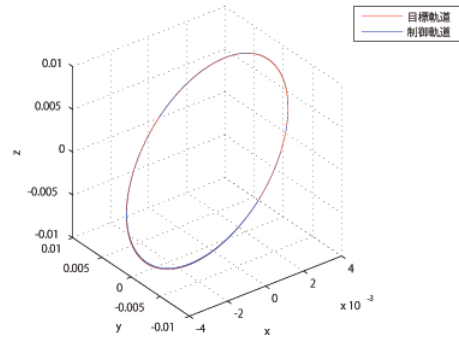


図 5 維持制御

ω_{xy} での維持制御における R とフィードバックゲイン K を以下に示す.

$$R = 10^{14.8750} \times I_3,$$

$$K = \begin{bmatrix} 12.6919 & 7.9990 & 0.0000 \\ -2.3739 & -1.4961 & 0.0000 \\ 3.7120 & 2.3395 & 0.0000 \\ 2.3395 & 1.4744 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 3 \times 10^{-15} \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.475 \times 10^{-7} \end{bmatrix}^T$$

$\omega_{xyz}, \omega_z, \omega = 1/2, 1, 2, 3$ での維持制御における R とフィードバックゲインを以下に示す.

$$R = 10^{13.5000} \times I_3,$$

$$K = \begin{bmatrix} 10.4407 & 6.5802 & 0.0000 \\ -1.9528 & -1.2307 & 0.0000 \\ 3.0536 & 1.9245 & 0.0000 \\ 1.9245 & 1.2129 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 4.9375 \\ 0.0000 & 0.0000 & 6.4391 \end{bmatrix}^T$$

それぞれの周波数におけるノルムのグラフと値を以下に示す.

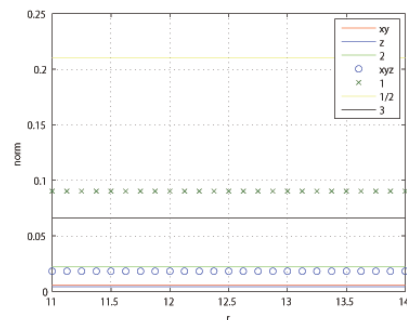


図 6 維持制御にかかる周波数毎のノルムの比較

表 1 それぞれの周波数における最小のノルム

ω	ノルム
xy	5.4585×10^{-3}
z	4.2261×10^{-3}
2	2.2103×10^{-2}
xyz	1.8269×10^{-2}
1	9.0267×10^{-2}
1/2	2.0996×10^{-1}
3	6.5837×10^{-2}

図 6 より, 維持制御において r を変化させてもノルムの変化は極めて微小であることがわかる. また, 維持制御にかかるノルムにおいて ω_z が最小であることが示された.

4.4 移行制御

次に, 制御対象を L_2 点から目標軌道へ移行させる制御を行う. ここでは 7 つの周波数に対して r を変えたときのノルムと整定時間の比較を行う. ここでは, 誤差が 10^{-5} 以内のとき収束とした. また, 今回は整定時間の上限を小ハロ一軌道 3 周期分の $ST = 12.4350$ とした.

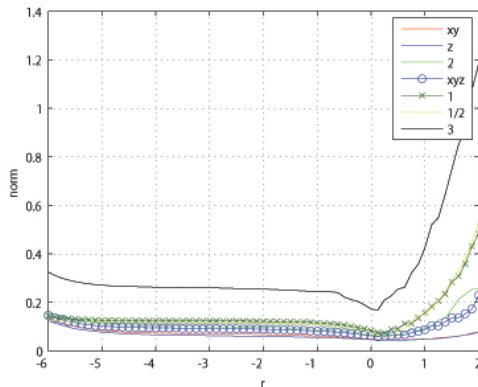


図 7 ノルムの比較

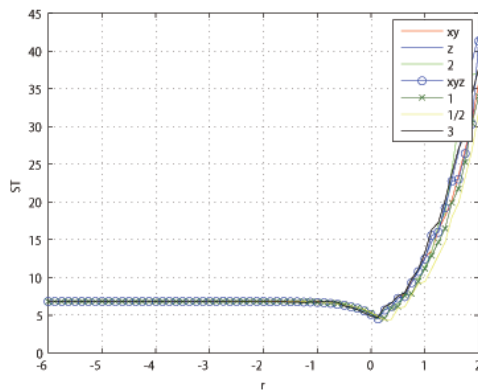


図 8 整定時間の比較

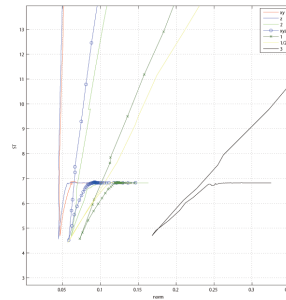


図 9 ノルムと整定時間の比較

図 7, 図 8 では, ω_{xy} は $r = 0.6250$, $\omega_{xyz}, \omega_z, \omega = 2, 3$ は $r = 0.1250$, $\omega = 1, 1/2$ は $r = 0.2500$ で最小のノルムとなり, それ以降では発散している. また図 9 より, ノルムと整定時間の両方が小さくなる r が存在することがわかる. このときのそれぞれの R とフィードバックゲイン K を以下に示す.

$$R = 10^{0.6250} \times I_3,$$

$$K = \begin{bmatrix} 12.736 & 5.3073 & 0.0000 \\ -1.8847 & -0.2885 & 0.0000 \\ 4.6579 & 1.1856 & 0.0000 \\ 1.1856 & 2.2652 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.3522 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.7538 \end{bmatrix}^T$$

$$R = 10^{0.1250} \times I_3,$$

$$K = \begin{bmatrix} 13.855 & 4.4795 & 0.0000 \\ -1.9953 & 0.6932 & 0.0000 \\ 5.6133 & 0.7747 & 0.0000 \\ 0.7737 & 3.3740 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0141 \\ 0.0000 & 0.0000 & 3.0866 \end{bmatrix}^T$$

$$R = 10^{0.2500} \times I_3,$$

$$K = \begin{bmatrix} 13.541 & 4.7067 & 0.0000 \\ -1.9599 & 0.3747 & 0.0000 \\ 5.3291 & 0.8820 & 0.0000 \\ 0.8820 & 3.0204 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.7848 \\ 0.0000 & 0.0000 & 2.6820 \end{bmatrix}^T$$

それぞれの周波数におけるノルムを以下に示す.

表 2 それぞれの周波数における最小のノルム

ω	ノルム
xy	1.770×10^{-2}
z	1.750×10^{-2}
2	1.810×10^{-2}
xyz	1.760×10^{-2}
1	1.790×10^{-2}
1/2	2.000×10^{-2}
3	2.160×10^{-2}

表より、移行制御において最小のノルムの周波数は $\omega = \omega_z$ であった。以上より、移行制御と維持制御において最小のノルムの周波数は ω_z となることがわかる。

4.5 ミッションにおける燃費評価

小ハロー軌道を生成するにあたり、周波数が整数の場合は月の公転周期に小ハロー軌道の周期が比例するため観測時に都合がよい。そこで周波数が整数の場合で最もノルムの低い $\omega = 2$ で維持制御を行うが好ましいと考える。ここでは、移行制御において維持制御と同様に周波数 $\omega = 2$ を用いる場合と、移行制御において最もノルムの低い ω_z を用いる場合の全時間にかかるノルムを比較し、どのように差が出るかを検証していく。まず、周波数を変えずに小ハロー軌道を生成するシミュレーションを示す。初めに、 L_2 点から目標軌道に移行させるシミュレーションを図 10 に示す。

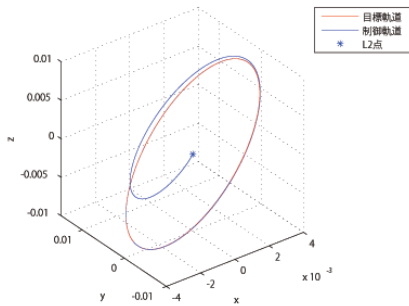


図 10 移行制御 $\omega = 2$

このときの全体にかかる入力を図 11 に示す。

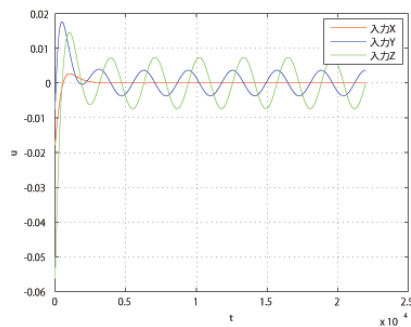


図 11 全時間での入力 ($\omega = 2$ $\omega = 2$)

移行から維持にかけた全時間にかかるノルムは 0.1832 となった。次に、移行制御から維持制御にかけて周波数を ω_z から $\omega = 2$ に変えて、小ハロー軌道を生成するシミュレーションを以下に示す。図 12 は L_2 点から目標軌道までを ω_z で移行したシミュレーションである。

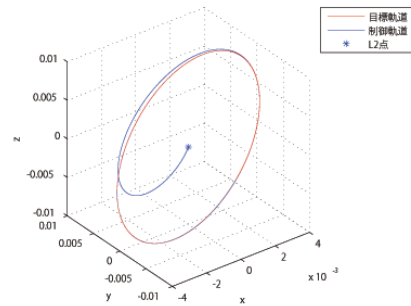


図 12 移行制御 ω_z

このときの全時間にかかる入力を図 13 に示す。

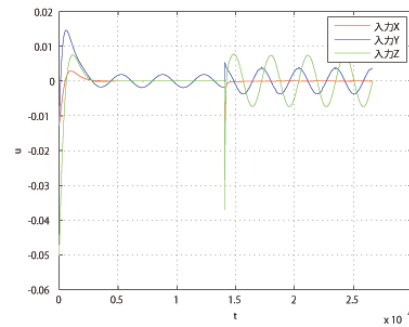


図 13 全時間での入力 (ω_z $\omega = 2$)

シミュレーションより、 ω_z から $\omega = 2$ に変化させることで、大きな入力が見られた。移行から維持にかけた全時間にかかるノルムは 0.1474 となった。周波数を変化させる場合と周波数を変化させない場合を比較すると、周波数を変化させる場合の方が周波数を変化させない場合に比べて小ハロー軌道 1.5 周分のノルムが節約できることがわかる。

5 おわりに

本研究では月の裏側に小ハロー軌道を生成し、宇宙機をその軌道に乗せて観測を行うために、周波数制御と収束周期内に加える制御を用いて目標軌道を維持させ、 L_2 点から人工衛星を目標軌道へ移行させる制御を行った。また 7 つの周波数に合わせた制御を行い、制御にかかるノルムを比較し、より良い周波数を検討した。周波数制御を行う中で目標軌道を維持させるのに最もノルムの低い設定をし、移行制御から維持制御にかけて周波数を変化させることでノルムを抑えることを可能にした。その結果、ミッションを行うにあたり、観測しやすかつ燃料消費も抑えられる制御方法を見つけることができた。

参考文献

- [1] 森泰親, 現代制御理論, 森北出版, pp94-96(2013)
- [2] A. Ichikawa., M. Bando., "Formation Flying near the Libration Points in the Elliptic Restricted Three-Body Problem".