

「質問者の島」のパズル

2009SE166 宮下健一

指導教員：佐々木克巳

1 はじめに

本研究の目的は、スマリヤン [1] の「質問者の島」のパズル (19 問) に対して、真理値表を活用した解を与えること、および、真理値表から同様の問題を作成することである。真理値表を用いることで、論理パズルは簡潔に解けるのではないかと、いう点に注目して、[1] に記載されている解答と比較して研究する。また、真理値表から問題を作成することで、真理値表についてさらに理解を深める。

本稿では、研究で扱った 19 問の中から、4 問を抽出し、その真理値表による解法を示す。また、「質問者の島」の前提条件をもとに、真理値表から問題を作成した結果を示す。

ここで用いる論理記号は「かつ」を表す \wedge 、「または」を表す \vee 、「でない」を表す \neg 、「ならば」を表す \Rightarrow 、「同値」を表す \Leftrightarrow の 5 つである。また、真理値 t は「真である」を意味し、真理値 f は「偽である」を意味する。

2 真理値表を用いた解

この節では、[1] から抽出した 4 問に対して、真理値表を用いた解を与える。最初に、これらの問の前提条件を [1] の表現を要約して示す。

前提条件 1([1])

- ・この島の住民たちはイエスまたはノーで答えられる質問しかしない。
 - ・住民の 1 人 1 人は 2 つのタイプ、A と B のうちの 1 つである。
 - ・A タイプの人々は正解がイエスである質問しかできない。
 - ・B タイプの人々は正解がノーである質問しかできない。
- 上記の前提条件から次の同値性がいえる。

(1) 質問者が A タイプ \Leftrightarrow 質問の正解がイエス

以下の問題の真理値を用いた解法において、この同値性が重要な役割を果たす。

問題 1([1])

私は一度この島を訪れたとき、ラッセル・エーサンとヴァイオレットの名前の夫妻にであった。エーサンが誰かに、「ヴァイオレットと私はともに B タイプですか？」と尋ねるのを聞いた。ヴァイオレットのタイプは何か？真理値表を用いた解法

この問題に必要な真理値を表 1 にまとめた。ただし、エーサンを夫、ヴァイオレットを妻として考える。ここで、「質問者が A タイプ」を P とし、「妻が A タイプである」を R とする。

表 1 では、(1) の同値性を満たす行は 3 行目だけである。したがって、妻ヴァイオレットのタイプは A タイプ

表 1 問題 1 の真理値表

(1) の左辺		(1) の右辺
P	R	$\neg P \wedge \neg R$
t	t	f
t	f	f
f	t	f
f	f	t

であると結論される。また、夫ラッセル・エーサンのタイプは B タイプである。

問題 2([1])

次に私はゴルドンという姓の夫婦に出会った。ゴルドン氏は妻に、「ねえ、ぼくらはそれぞれ違ったタイプかな？」と尋ねた。各人について何が言えるか？

真理値表を用いた解法

この問題に必要な真理値を表 2 にまとめた。ただし、ゴルドン氏を夫として考える。ここで、「質問者が A タイプ」を P とし、「妻が A タイプである」を R とする。

表 2 問題 2 の真理値表

(1) の左辺		(1) の右辺
P	R	$\neg (P \Leftrightarrow R)$
t	t	f
t	f	t
f	t	t
f	f	f

表 2 では、(1) の同値性を満たす行は 2 行目と 4 行目である。したがって、夫のタイプにかかわらず、妻のタイプは B タイプであることが結論される。

次の問題 3 では、これまでの前提条件にさらに条件が加わる。以下に [1] からその条件の部分を引用する。

前提条件 2([1])

精神病院から 3 人の患者が逃走して、質問者の島を訪ねてきた。この精神病院から来た患者は正気か狂気で、正気の患者は自分たちの信ずるすべてにおいてまったく正しく、狂気の患者は自分たちの信ずるすべてにおいてまったく嘘であるということであった。また、患者は正気であれ、つねに正直であった。

上記の前提条件から次の同値性がいえる。

(2) 「患者が Q と思う」 \Leftrightarrow

「患者が正気である \Leftrightarrow Q の正解がイエス」

ただし、この同値性の「 \leftrightarrow 」の部分は [1] の解答から成立すると判断している。また、[1] の解答から患者が「信じる」、「思う」、「発言する」を同一視して考える。

問題 3([1])

患者の 1 人、アーノルドは島の住民に出会った。その住民は彼に尋ねた「あなたは私を B タイプだと思うか?」この住民について何が帰結されるか、またアーノルドについては何が帰結されるか?

真理値表を用いた解法

この問題に必要な真理値を表 3 にまとめた。ここで、「島の住民が A タイプ」を P とし、「アーノルドが正気である」を R とする。また、(2) より、(1) の右辺 \leftrightarrow 「 $R \leftrightarrow \neg P$ 」である。

表 3 問題 3 の真理値表

(1) の左辺		(1) の右辺	
P	R	$\neg P$	$R \leftrightarrow \neg P$
t	t	f	f
t	f	f	t
f	t	t	t
f	f	t	f

表 3 では、(1) の同値性を満たす行は 2 行目と 4 行目のみである。よって、住民のタイプにかかわらず、アーノルドは狂気であると結論される。

問題 4([1])

私は大変興味深い噂「この島に魔術師がいるかもしれない」ということを耳にした。

次の住民はダニエル・モットといった。彼が問うには、「魔術師は B タイプか?」と。私は十分な情報を得ているか?

真理値表を用いた解法

この問題に必要な真理値を表 4 にまとめた。ここで、「ダニエルが A タイプ」を P とし、「魔術師が A タイプである」を R とする。

表 4 問題 4 の真理値表

(1) の左辺	(1) の右辺	
P	R	$\neg R$
t	t	f
t	f	t
f	t	f
f	f	t

表 4 では、(1) の同値性を満たす行は 2 行目と 3 行目である。よって、ダニエルと魔術師のタイプが違うことがわかるので、ダニエルが魔術師でないことが結論される。

3 真理値表からの問題作成

この節では、質問者の島の前提条件から得た同値性 (1) をもとに、自ら与えた真理値から問題作成を行っていく。問題作成の手順としては、真理値表を作成し、そこから問題となる質問を考えるというものである。問題作成を行っていく上の条件として、質問者の島の住民である X と Y という名の登場人物を加えて考えていく。X と Y のタイプについて考えていき、16 通りの真理値表について考えていく。ただし、ここでは 16 通りの中から 5 通りを抽出し、その真理値を表 5 に示す。また、「X が A タイプである」を P とし、「Y が A タイプである」を R として考える。

表 5 5 通りの真理値表

(1) の左辺	P	R	(1) の右辺				
			【1】	【2】	【3】	【4】	【5】
t	t	t	f	t	f	f	f
t	t	f	f	f	t	t	f
t	f	t	f	t	t	t	f
t	f	f	f	f	t	f	t

対応する質問

すべて X が Y に質問したとする。

- 【1】「 $1=2$ ですか?」
- 【2】「あなた (Y) は A タイプですか?」
- 【3】「私たちの少なくとも 1 人は B タイプですか?」
- 【4】「私たちは違うタイプですか?」(問題 2 と同様)
- 【5】「私たちはともに B タイプですか?」(問題 1 と同様)

結論

(1) の同値性より、

- 【1】Y のタイプにかかわらず、X は B タイプである。
- 【2】X と Y は同じタイプである。
- 【3】X が A タイプ、Y が B タイプである。
- 【4】X のタイプにかかわらず、Y は B タイプである。
- 【5】X が B タイプ、Y が A タイプである。

4 おわりに

本研究より、「質問者の島」のパズルを真理値表を用いて解くことができた。[1] に記載されているように真理値表を用いない解法でも解けるが、解法の見やすさであったり、分かりやすさなどの点においても真理値表を用いたほうが良いと感じた。また、真理値表から問題作成を行うことで、真理値表についての理解がさらに深まった。論理パズルには他にも多くの問題が存在するので、他の問題にも取り組んでいきたいと感じた。

参考文献

- [1] レイモンド・スマリヤン (安部剛久, 黒沢俊雄, 福島修身, 山口裕 訳): 『数学パズル 美女か野獣か?』。森北出版株式会社, 東京, 1996