

多群指数モデルにおけるすべての平均相違の多重比較法

2009SE056 廣瀬由幸 2009SE178 森下史章

指導教員：白石高章

1 はじめに

3つ以上の群で、平均に関する場合に行う多重比較法について考察する。

多重比較法にはさまざまなものがある。たとえば、Bonferroni法(ボンフェローニ)、Holm法(ホルム)、Dunnett法(ダネット)、Tukey-Kramer法(テューキー・クレマー)などがある。

この中で今回の解析では、正確な検定をするためボンフェローニ法を用いて、多重比較検定と同時信頼区間を調べる。また、地震の発生回数はポアソン分布に従うが、地震の発生間隔は、指数分布に従うことがわかっている。この研究では、2010年11月から2012年6月までに発生した地震のM5以上の地震が起きてから次のM5以上の地震が起きるまでの時間のデータを使って、解析を行う。

2 分布論

2.1 指数分布

まずは、補題1として、知られている結果を述べる。補題1 Z_1, Z_2, \dots, Z_n は互いに独立で同一の密度関数 $f_Z(x) = (1/\mu)e^{-(x/\mu)}I_{(0,\infty)}(x)$ をもつ指数分布 $EX(1/\mu)$ に従うとする。このとき、

$$T \equiv \left(\frac{2n}{\mu}\right) \bar{Z}_n \sim \chi_{2n}^2$$

が成り立つ。ただし、 $\bar{Z}_n \equiv (1/n) \sum_{i=1}^n Z_i$ とする。

証明 $Z_1, Z_2, \dots, Z_n \sim EX(1/\mu) = GA(1, 1/\mu)$

ただし、 $GA(1, 1/\mu)$ は形状母数1, 尺度母数 $1/\mu$ のガンマ分布である。

参考文献 [3] の系 3.16 より、

$$W \equiv \sum_{i=1}^n Z_i \sim GA\left(n, \frac{1}{\mu}\right)$$

となり、 W の密度関数は、

$$f_W(x) = \frac{\left(\frac{1}{\mu}\right)^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\frac{x}{\mu}}$$

となる。

$T = 2W/\mu$ であるので、 $a = 2/\mu, b = 0$ として参考文献 [3] の系 2.34 を適用すると、

$$\begin{aligned} f_T(y) &= \frac{1}{|a|} f_W\left(\frac{y-b}{a}\right) \\ &= \frac{1}{\left(\frac{2}{\mu}\right)} \frac{\left(\frac{1}{\mu}\right)^n}{\Gamma(n)} \left(\frac{y}{\frac{2}{\mu}}\right)^{n-1} e^{-\mu\left(\frac{y}{2\mu}\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2^n \Gamma(n)} y^{n-1} e^{-\frac{y}{2}} \\ &= (\chi_{2n}^2 \text{ の密度関数}) \end{aligned}$$

X_1, X_2, \dots, X_{n_1} は互いに独立で同一の密度関数 $f_X(x) = (1/\mu_1)e^{-(x/\mu_1)}$ をもつ指数分布 $EX(1/\mu_1)$ に従い、 Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2} は互いに独立で同一の密度関数 $f_Y(x) = (1/\mu_2)e^{-(x/\mu_2)}$ をもつ指数分布 $EX(1/\mu_2)$ に従うとする。また、 $X_i, Y_j (i = 1, \dots, n_1, j = 1, \dots, n_2)$ も互いに独立。命題1 $\chi_{2n_1}^2$ は自由度 $2n_1$ のカイ2乗分布を表し、 $F_{2n_1}^{2n_2}$ は自由度 $(2n_1, 2n_2)$ の F 分布を表すものとする。このとき、

$$T_{(\mu_1, \mu_2)} \equiv \frac{\mu_2 \bar{X}_{n_1}}{\mu_1 \bar{Y}_{n_2}} \sim F_{2n_1}^{2n_2} \quad (1)$$

が成り立つ。ただし、 \bar{X}_{n_1} と \bar{Y}_{n_2} はそれぞれ、 X_i と Y_j の標本平均とする。

証明 T_X, T_Y は互いに独立とする。このとき、参考文献 [1] の定義 5.5 と参考文献 [3] の定理 3.20 より、

$$T_X \sim \chi_m^2, T_Y \sim \chi_n^2 \Rightarrow \frac{T_X}{T_Y} \sim F_n^m \quad (2)$$

補題1より、

$$\begin{aligned} T_1 &\equiv \frac{2n_1}{\mu_1} \bar{X}_{n_1} \sim \chi_{2n_1}^2 \\ T_2 &\equiv \frac{2n_2}{\mu_2} \bar{Y}_{n_2} \sim \chi_{2n_2}^2 \end{aligned}$$

となり、(2) で、

$m \leftarrow 2n_1, T_X \leftarrow T_1, n \leftarrow 2n_2, T_Y \leftarrow T_2$ のように適用すると、

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\mu_2 \bar{X}_{n_1}}{\mu_1 \bar{Y}_{n_2}} \sim F_{2n_2}^{2n_1}$$

となる。

命題1より

$$P\left(F_{2n_2}^{2n_1}(1-\alpha/2) < \frac{\mu_2 \bar{X}_{n_1}}{\mu_1 \bar{Y}_{n_2}} < F_{2n_2}^{2n_1}(\alpha/2)\right) = 1-\alpha$$

となり、確率の中を書き換えることにより、 μ_2/μ_1 の信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間

$$\frac{\bar{Y}_{n_2} F_{2n_2}^{2n_1}(1-\alpha/2)}{\bar{X}_{n_1}} < \frac{\mu_2}{\mu_1} < \frac{\bar{Y}_{n_2} F_{2n_2}^{2n_1}(\alpha/2)}{\bar{X}_{n_1}}$$

を得る。

帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ vs. 対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

を考える。

命題1より、帰無仮説 H_0 の下で、

$$T \equiv \frac{\bar{X}_{n_1}}{\bar{Y}_{n_2}} \sim F_{2n_2}^{2n_1} \quad (3)$$

であるので、

$$P(F_{2n_2}^{2n_1}(1-\alpha/2) < T < F_{2n_2}^{2n_1}(\alpha/2)) = 1 - \alpha$$

となる。したがって、

$$T > F_{2n_2}^{2n_1}(\alpha/2) \text{ または } T < F_{2n_2}^{2n_1}(1-\alpha/2)$$

のときに H_0 を棄却し、 $\mu_1 \neq \mu_2$ と判定する。

ここで、 $F_{2n_2}^{2n_1}(\alpha/2)$ は自由度 $(2n_1, 2n_2)$ の F 分布の上側 $100\alpha\%$ 点を表す。

2.2 F 分布

命題 1 の (1) と (3) より、次の補題 2 を得る。

補題 2 $X_{ij} \sim EX(1/\mu_i)$ ($j = 1, \dots, n_i, i = 1, \dots, k$) とし、 $\{X_{ij} | j = 1, \dots, n_i, i = 1, \dots, k\}$ は互いに独立とする。このとき、

$$T_{ii'}(\mu) = \frac{\mu_{i'} \hat{\mu}_i}{\mu_i \hat{\mu}_{i'}} \sim F_{2n_i}^{2n_{i'}}$$

となり、帰無仮説 $H_{(i,i')} : \mu_i = \mu_{i'}$ の下で、

$$T_{ii'} = \frac{\hat{\mu}_i}{\hat{\mu}_{i'}} \sim F_{2n_{i'}}^{2n_i}$$

が成り立つ。ただし、 $\hat{\mu}_i \equiv (1/n_i) \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$ ($i = 1, \dots, k$) とする。

補題 2 より

$$P\left(F_{2n_{i'}}^{2n_i}(1-\alpha/2) < \frac{\mu_{i'} \hat{\mu}_i}{\mu_i \hat{\mu}_{i'}} < F_{2n_{i'}}^{2n_i}(\alpha/2)\right) = 1 - \alpha$$

となる。確率の中を書き換えることにより、 $\mu_{i'}/\mu_i$ の信頼係数 $1 - \alpha$ の同時信頼区間

$$\frac{\hat{\mu}_{i'} F_{2n_{i'}}^{2n_i}(1-\alpha/2)}{\hat{\mu}_i} < \frac{\mu_{i'}}{\mu_i} < \frac{\hat{\mu}_{i'} F_{2n_{i'}}^{2n_i}(\alpha/2)}{\hat{\mu}_i}$$

を得る。

したがって、

帰無仮説 $H_{(i,i')} : \mu_i = \mu_{i'}$ vs. 対立仮説 $H_{(i,i')}^A : \mu_i \neq \mu_{i'}$ に対する水準 α の検定は、

$$T_{ii'} > F_{2n_{i'}}^{2n_i}(\alpha/2) \text{ または } T_{ii'} < F_{2n_{i'}}^{2n_i}(1-\alpha/2)$$

のときに $H_{(i,i')}$ を棄却し、 $\mu_i \neq \mu_{i'}$ と判定する。

3 ボンフェローニ法

参考文献 [2] を基にボンフェローニ法を説明する。ボンフェローニ法とは、 m 個の事象 D_i ($i = 1, 2, \dots, m$) に対して、

$$P\left(\bigcup_{i=1}^m D_i\right) \leq \sum_{i=1}^m P(D_i) \quad (4)$$

(4) の不等式に基づく多重比較法である。

(4) は参考文献 [3] の命題 2.5 で証明されている。

推測の対象となるファミリーを

$$\mathcal{F} = \{H_{01}, H_{02}, \dots, H_{0m}\}$$

とする。 D_i を帰無仮説 H_{0i} が正しいにもかかわらず棄却される事象と考える。これを (4) 式に当てはめると、

P (帰無仮説のうち少なくとも 1 つの H_{0i} が正しいにもか

かわらず棄却される) $\leq \sum_{i=1}^m P$ (帰無仮説 H_{0i} が正しいにもかかわらず棄却される) $\leq \alpha$ (5)

この多重比較について最大タイプ FWER を α 以下にするためには、(5) 式の右辺に現れているそれぞれの項について、

$$P(\text{帰無仮説 } H_{0i} \text{ が正しいにもかかわらず棄却される}) \leq \alpha/m \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

が成立すれば、

$$\sum_{i=1}^m P(\text{帰無仮説 } H_{0i} \text{ が正しいにもかかわらず棄却される}) \leq m \times (\alpha/m) = \alpha$$

となる。したがって、

P (帰無仮説のうち少なくとも 1 つの H_{0i} が正しいにもかかわらず棄却される確率) $\leq \alpha$

3.1 すべての平均相違の場合のボンフェローニ法

{ 帰無仮説 $H_{(i,i')}$ vs. 対立仮説 $H_{(i,i')}^A | 1 \leq i < i' \leq k$ } に対する多重比較検定を補題 2 を用いてボンフェローニ法で行う方法を論述する。

手順 1. 推測の対象となるファミリーを明示し、ファミリーに含まれる帰無仮説の個数 ${}_k C_2 = \{k(k-1)\}/2$ 個を求め、

$$\mathcal{F} = \{H_{(i,i')} | 1 \leq i < i' \leq k\}$$

手順 2. 有意水準 α を定める。有意水準は $\alpha = 0.05$ もしくは 0.01 と定めることが多い。

手順 3. ファミリーに含まれるそれぞれの帰無仮説に対して検定統計量 $T_{ii'}$ を選ぶ。

手順 4. データを取り、検定統計量 $T_{ii'}$ を計算する。

手順 5. 各検定統計量 $T_{ii'}$ について有意水準 $\alpha/\{k(k-1)/2\}$ に対する検定は、

$$T_{ii'} > F_{2n_{i'}}^{2n_i}(\alpha/\{k(k-1)\}) \text{ または } T_{ii'} < F_{2n_{i'}}^{2n_i}(1-\alpha/\{k(k-1)\})$$

のときに $H_{(i,i')}$ を棄却する。

$H_0 : \mu_1 = \dots = \mu_k$ の下で、ボンフェローニの方程式より、

$$\begin{aligned} P_0\left(\bigcup_{1 \leq i < i' \leq k} A_{ii'}\right) &\leq \sum_{1 \leq i < i' \leq k} P_0(A_{ii'}) \\ &= \sum_{1 \leq i < i' \leq k} \left\{ \frac{\alpha}{\frac{k(k-1)}{2}} \right\} \\ &= {}_k C_2 \times \left\{ \frac{\alpha}{\frac{k(k-1)}{2}} \right\} \\ &= \alpha \end{aligned}$$

となる。ただし、

$$A_{ii'} \equiv \{T_{ii'} > F_{2n_{i'}}^{2n_i}(\alpha/\{k(k-1)\}) \text{ または}$$

$$T_{ii'} < F_{2n_{i'}}^{2n_i} (1 - \alpha / \{k(k-1)\})$$

とする。同様に、信頼係数 $1 - \alpha$ の同時信頼区間は、

$$\frac{\hat{\mu}_{i'} F_{2n_{i'}}^{2n_i} (1 - \alpha / \{2k(k-1)\})}{\hat{\mu}_i} < \frac{\mu_{i'}}{\mu_i} <$$

$$\frac{\hat{\mu}_{i'} F_{2n_{i'}}^{2n_i} (\alpha / \{2k(k-1)\})}{\hat{\mu}_i} \quad (1 \leq i < i' \leq k)$$

で与えられる。

4 地震データ

表1～表5は、参考文献[4]のデータをもとに2010年11月から2012年6月までのM5以上で日本近海で発生した地震の、ある地震が発生してから次の地震が発生するまでの時間差を求め、基本統計量を計算した表である。東北地方太平洋沖地震が発生した2011年3月が203回と最も発生回数が多く、地震が発生してから、次の地震が発生するまでの時間差の平均は3時間17分で、最も短いことがわかった。標本数の最大値は、2011年3月の203回が最大で、他の月は、ほとんどの月が10回から20回程度となっていて、多い月でも40回程度である。このことから、やはり東北地方太平洋沖地震の発生した2011年3月は異常であった。

表1. 2010年11月

2010年11月	日	時間
平均	7.5	180 : 00
分散	9.598	230 : 22
最小	4.737	113 : 42
最大	11.397	273 : 32

標本数 5

表2. 2011年2月1日～15日

2011年2月	日	時間
平均	2.5	60 : 00
分散	4.022	96 : 31
最小	0.611	14 : 40
最大	5.048	121 : 10

標本数 6

表3. 2011年3月16日～31日

2011年3月	日	時間
平均	0.280	06 : 43
分散	0.118	02 : 50
最小	0.004	00 : 06
最大	1.516	36 : 24

標本数 57

表4. 2011年4月

2011年4月	日	時間
平均	0.6382	15 : 19
分散	0.5403	12 : 58
最小	0.0007	00 : 01
最大	3.493	83 : 51

標本数 47

表5. 2011年9月

2011年9月	日	時間
平均	1.666	39 : 59
分散	3.963	95 : 07
最小	0.009	00 : 14
最大	6.765	162 : 22

標本数 18

5 データ解析

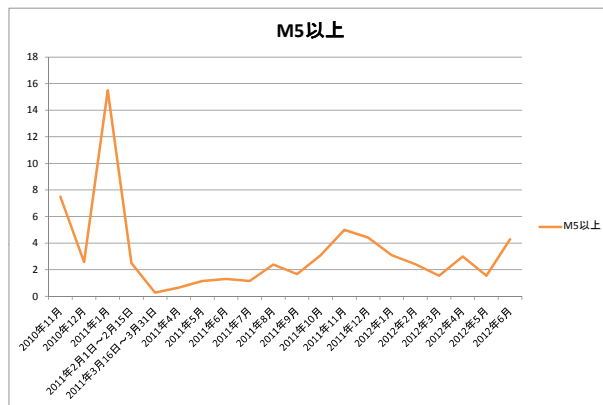


図1 M5以上の地震の発生間隔の平均

図1と、発生回数の表より、特徴があった2011年3月16日～31日、2011年9月、また東北地方太平洋沖地震の直前の月である2011年2月1日～15日、2010年11月で、3.1節の順に添って多重比較による解析を行う。

表6. データ

群	年月	標本平均	標本数 n_i
第1群	2010年11月	6.000	5
第2群	2011年2月1日～15日	2.500	6
第3群	2011年3月16日～31日	0.280	57
第4群	2011年9月	1.666	18

手順1. ファミリーの個数は、 ${}_4C_2 = 6$ 個

$$\mathcal{F} = \{H_{(1,2)}, H_{(1,3)}, H_{(1,4)}, H_{(2,3)}, H_{(2,4)}, H_{(3,4)}\}$$

手順2. 有意水準を $\alpha = 0.05$ とする。

手順3. 検定統計量を

$$T_{ii'} = \frac{\hat{\mu}_i}{\hat{\mu}_{i'}} \sim F_{2n_i}^{2n_{i'}}$$

とする。

手順4. データを取り、検定統計量 $T_{ii'}$ を計算する。

$$(1) T_{12} = \frac{6.000}{2.500} = 2.400$$

(1)と同様に計算すると、(2) $T_{13} = 21.429$, (3) $T_{14} = 3.601$, (4) $T_{23} = 8.928$, (5) $T_{24} = 1.501$, (6) $T_{34} = 0.168$ となる。

手順5. μ_2/μ_1 の信頼係数 $1 - \alpha$ の同時信頼区間は、

$$0.070 < \frac{\mu_2}{\mu_1} < 2.212$$

である。検定統計量 T_{12} に対する検定は、

$$T_{12} > F_{2n_2}^{2n_1}(\alpha/12) = 5.308 \text{ または}$$

$$T_{12} < F_{2n_2}^{2n_1}(1 - \alpha/12) = 0.169$$

のときに $H_{(1,2)}$ を棄却する。

よって、 $0.169 < T_{12} = 2.400 < 5.308$ となるので、棄却されない。 $H_{(1,3)}, H_{(1,4)}, H_{(2,3)}, H_{(2,4)}, H_{(3,4)}$ についても同様に計算を行っていくと、以下の結果を得る。

表 7. データ解析結果

$H_{(i,i')}$	検定の結果	信頼区間の結果
$H_{(1,2)}$	棄却されない	大小関係はわからない
$H_{(1,3)}$	棄却される	$\mu_3 < \mu_1$
$H_{(1,4)}$	棄却される	$\mu_4 < \mu_1$
$H_{(2,3)}$	棄却される	$\mu_3 < \mu_2$
$H_{(2,4)}$	棄却されない	大小関係はわからない
$H_{(3,4)}$	棄却される	$\mu_4 > \mu_3$

5.1 データ解析結果

検定の結果より、 $H_{(1,2)}$ と $H_{(2,4)}$ が棄却されなかった。このことから、1 群と 3 群、1 群と 4 群、2 群と 3 群、3 群と 4 群の間で違いがあることがわかった。

信頼区間の結果より、

$$\mu_3 < \mu_4 < \mu_1, \quad \mu_3 < \mu_2$$

⇔

地震の平均発生時間間隔に関して、

2011 年 3 月 16 日 ~ 31 日 < 2011 年 9 月 < 2010 年 11 月、

2011 年 3 月 16 日 ~ 31 日 < 2011 年 2 月 1 日 ~ 15 日

となる。

6 C++ 言語によるボンフェローニ法での検定プログラム

以下のプログラムは C++ げんごによるボンフェローニ法での検定を行うプログラムである。ページ数の都合上、C 言語によるボンフェローニ法での検定プログラムは、main プログラムだけとし、その説明を行う。

```
double alpha1,alpha2;
nyuuryoku(); /*群の個数と有意水準 を入力する関数*/
suuchi(); /*標本平均と標本数を入力する関数*/
printf("/n");
toukeiryoku(avr); /*検定統計量を計算する関数*/
printf("/n");
alpha1=alpha/(k*(k-1)); /*有意水準  $\alpha/k(k-1)$  を計算する式*/
alpha2=(double)1.0-alpha1; /*有意水準  $1-\alpha/k(k-1)$  を計算する式*/
kentei(alpha1,alpha2,k); /*信頼区間, 検定統計量に対する検定を多重比較する関数*/
kekka(avr,k); /*検定の結果を出力する関数*/
return 0;
```

プログラムの流れは、

1. nyuuryoku 関数と suuchi 関数によって、扱うデータの群の個数、有意水準、標本平均、標本数 (n_i) を入力する。
2. toukeiryoku 関数で検定統計量を計算する。

3. 有意水準 α と $1 - \alpha$ を計算する。

4. kentei 関数により、同時信頼区間、棄却域を計算出力し、第 i 群と第 j 群が帰無仮説 $H_0 : \mu_i = \mu_j$ の下で棄却されるか、採択されるかを出力する。

5. kekka 関数により、検定の結果を表にして出力する。

注) このプログラムでは C++ 言語の特徴であるオブジェクト指向は用いていないが、情報システム数理学科の実習の際、Windows に C++ 言語のコンパイラをインストールしたため C 言語ではなく、C++ 言語を用いてプログラムの作成をした。なお、本論で述べた変更方法により、C コンパイラでも実行可能形式のプログラムを作成できる。

6.1 実行結果

以下はプログラムの実行結果の一部である。

誤差 0.000010 以下の自由度 (8 , 12) の F 分布の上側 100 パーセント点は 5.583336,

1 - 100 パーセント点は 0.134972

μ_2/μ_1 の信頼係数 1- の同時信頼区間は、

$$0.044991 < \mu_2/\mu_1 < 1.861112$$

検定統計量 $T(1,2)$ に対する検定は、

$$T(1,2) > F(8,12;0.004167) = 5.583336$$

$$\text{または } T(1,2) < F(8,12;0.995833) = 0.134972$$

のときに $H(1,2)$ を棄却する。

$0.134972 < T(1,2) = 3.000000 < 5.583336$ となるので、棄却されない。

のように出力される。

7 おわりに

この研究では、指数分布を用いているため、地震の発生時間間隔でボンフェローニ法を用いて検定を行った。発生時間間隔が短いということは、地震の発生回数は多いということになる。よって、2011 年の 3 月が最も地震の発生回数が多いことが分かった。また、2011 年の 9 月の方が 2010 年の 11 月よりも多く地震が発生していることが分かった。

さらに、C++ というプログラム言語を用いて、データ解析を行うプログラムを作成した。このプログラムは地震のデータだけでなく指数分布に従う他のデータにも適用することができる。

参考文献

- [1] 白旗慎吾: 『統計学』. ミネルヴァ書房, 京都, 2008.
- [2] 永田靖・吉田道弘: 『統計的多重比較法の基礎』. 株式会社 サイエンティスト社, 東京, 1997.
- [3] 白石高章: 『統計科学の基礎 データと確率の結びつきがよくわかる数理』. 日本評論社, 東京, 2012.
- [4] 『日本気象協会』. <http://www.jwa.or.jp/>